

Ejercicios de Análisis Matemático

Continuidad y derivadas

1. Calcula los puntos de la elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

tales que la tangente en dichos puntos a la elipse pase por el punto $(3, 1)$.

Sugerencia. Debes calcular la recta tangente a la elipse en un punto genérico (u, v) de la misma e imponer la condición de que dicha recta pase por el punto $(3, 1)$.

2. Justifica que la ecuación

$$3^x - x^3 - \frac{6}{5} = 0$$

tiene exactamente cuatro soluciones reales.

Sugerencia. Usa los teoremas de Bolzano y de Rolle. Deriva la función las veces que sea preciso.

3. Prueba que para todo $x > 0$ se verifica que:

$$\frac{x-1}{x} \leq \log(x).$$

¿Cuándo se da la igualdad?

4. Calcula la imagen de la función $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ dada para todo $x > 0$ por:

$$f(x) = \frac{\log x}{x}.$$

Deduce que si $0 < a < b \leq e$ entonces $a^b < b^a$, y si $e \leq a < b$ entonces $b^a < a^b$.

Para entregar el día 16/11/2009